

Examen d'Algèbre 3

lundi 18 juillet 2022

Durée 01H30

Responsable : S. NAJIB

Exercice 1

On note $\mathbb{R}_2[X] := \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) \leq 2\}$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

On considère l'application:

$$f : P \in \mathbb{R}_2[X] \longmapsto P - (X - 1)P' \in \mathbb{R}_2[X],$$

avec P' désigne le polynôme dérivé de P .

- 1) Montrer que f est une application linéaire.
- 2) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$. En déduire le rang de f .
- 3) L'application f est-elle injective, surjective, bijective? Justifier les réponses.
- 4) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 5) La matrice A est-elle inversible? Justifier la réponse.

Exercice 2

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice: $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & a & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Étudier, selon les valeurs de a , l'inversibilité de la matrice M_a .
- 2) En déduire, selon les valeurs de a , le rang de la matrice M_a .
- 3) Calculer l'inverse $(M_a)^{-1}$ de la matrice M_a , lorsque cela est possible.

—fin de l'énoncé—